Cálculo da cobertura vertical e horizontal em caso de falha de controlo de UAS's

Emanuel João Gonçalves Camacho

Agosto de 2024

ANAC
Autoridade Nacional da Aviação Civil
Portuguese Civil Aviation Authority

1 Prefácio

O relatório aqui apresentado foi realizado no âmbito de um projeto estágio com a Autoridade Nacional de Aviação civil. O intuito do documento é aprofundar e demonstrar a base teórica usada pela ferramenta de cálculo desenvolvida durante o estágio.

Tendo em consideração a facilidade de entendimento para o leitor, em muitos casos apenas as soluções finais das equações serão apresentadas, as demonstrações completas encontrar-se-ão em anexo no final do documento apenas a título de curiosidade.

2 Agradecimentos

Agradeço profundamente toda a ajuda e a disponibilidade providenciada pelo Sr. Eng. Fábio Camacho e Sr. Eng. Joaquim Sousa ao longo da realização deste trabalho.

Ìndice

3 Introdução Teórica

3.1 Tipos de quedas

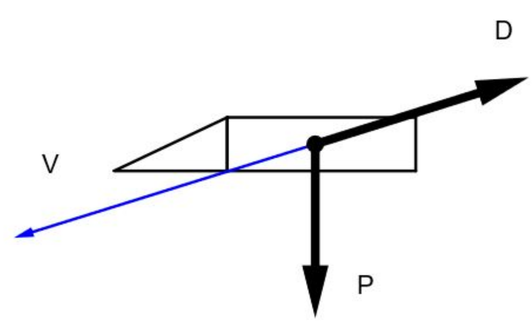
Rapidamente verifica-se que as falhas de funcionamento de UAS's levam a dois tipos distintos de quedas, balísticas (ou queda livre) no caso de aeronaves do tipo "rotary-wing" e planagens no caso de "fixed-wing". Por esta razão e pela natureza visivelmente distinta dos movimentos é essencial a sua separação e consequentemente, o seu cálculo de forma independente.

3.2 Queda Livre

3.2.1 Establecimento do problema

O maior desafio apresentado no cálculo teórico de uma queda livre é o arrasto causado pelo ar. Este atrito, mesmo para UAV's com perfil reduzido irá afetar seriamente a forma da queda logo é impossível ignorar completamente o seu impacto.

Primeiramente, a análise de um movimento requere o establecimento das forças atuantes :



Sendo neste caso as setas D e P representativas da força de atrito e o peso respetivamente e a seta V representativa da velocidade instantânea. Neste caso, temos a complicação da variação da direção e módulo da força de atrito já que esta terá a direção da velocidade e variará com o quadrado da mesma. Por esta razão foi decidido separar os movimentos nas suas componentes horizontal e vertical dando origem às seguintes equações :

$$\sum F_{hor} = -D_{hor} \tag{1}$$

$$\sum F_{ver} = D_{ver} - P \tag{2}$$

Desenvolvendo a expressão da força de atrito :

$$\sum D_{hor} = \frac{1}{2} \cdot C_d \cdot \rho \cdot A_1 \cdot {V_{hor}}^2 \tag{3}$$

$$\sum D_{ver} = \frac{1}{2} \cdot C_d \cdot \rho \cdot A_2 \cdot {V_{ver}}^2 \tag{4}$$

Sendo C_d o coeficiente de atrito do perfil, ρ a densidade do ar, A_1 a área de incidência no perfil da força de atrito na parte lateral do drone e A_2 a mesma área mas na parte superior (ou inferior). De forma a simplificar a equação de forma a facilitar cálculos futuros foram criadas as variáveis k_1 e k_2 :

$$k_1 = \frac{1}{2} \cdot C_d \cdot \rho \cdot A_1 \tag{5}$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \cdot C_d \cdot \rho \cdot A_2 \tag{6}$$

3.2.2 Resolução

Tendo as equações para as forças, é possível com relações básicas obter as equações diferencias para velocidades (relativamente ao solo ou "Ground Speed") e consequentemente distâncias percorridas :

$$a_{hor} = -\frac{k_1}{M} \cdot {V_{hor}}^2 \tag{7}$$

$$a_{ver} = \frac{k_2}{M} \cdot {V_{ver}}^2 - g \tag{8}$$

Sendo M a massa do drone e g a aceleração gravítica. Quando resolvidas obtemos as seguintes soluções :

$$V_{ver}(t) = \sqrt{\frac{Mg}{k_2}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{k_2 \cdot g}{M}} \cdot t\right) \tag{9}$$

Importante notar que nesta equação, quando $t \to +\infty$, $\tanh\left(\sqrt{\frac{k_2 \cdot g}{M}} \cdot t\right) \to 1$, ou seja, $V_{ver} \to \sqrt{\frac{k_2 \cdot g}{M}}$, que será a velocidade terminal de queda.

$$V_{hor}(t) = \frac{1}{k_1 t + \frac{1}{V_{hor_0}}} \tag{10}$$

Sendo V_{hor_0} a velocidade no momento do início da queda livre e assumindo que $V_{ver_0} = 0$.

$$d_{hor}(t) = \frac{\log(k_1 \cdot V_{hor_0} \cdot t + 1)}{k_1} \tag{11}$$

$$d_{ver}(t) = h_0 - \frac{M}{k} \log \left(\cosh \sqrt{\frac{k_2 \cdot g}{M}} \cdot t \right) \tag{12}$$

Sendo h_0 a altitude no momento do início da queda livre.

3.2.3 Correção do Vento

Outra complicação deste movimento é o vento (consideremos vento horizontal apenas incialmente), este induz uma força no drone que pode ser modelada de forma semelhante a uma força de atrito já que esta dependerá também da interação com o perfil lateral da aeronave :

$$F_{vento} = k_1 \cdot {V_{rel}}^2 \tag{13}$$

Neste caso, V_{rel} corresponde à velocidade relativa da aeronave com o vento

$$V_{rel} = V_{drone} - V_{vento} \tag{14}$$

Assumindo o vento constante, verifica-se que esta força aplicada pelo vento depende apenas da V_{drone} tal como o atrito D. Se igualarmos as duas equações :

$$k_1 \left(V_{drone} - V_{vento}\right)^2 = k_1 \cdot {V_{drone}}^2 \tag{15}$$

Resolvendo :

$$V_{drone} = \frac{V_{vento}}{2} \tag{16}$$

Ou seja, o drone, devido à influência do vento, acabará com uma velocidade terminal horizontal na direção do vento com o valor de metade da velocidade do vento. De forma a integrar esta consideração decidi fazer duas aproximações de simplificação :

- Ignora-se o período transitório até o drone atingir a velocidade terminal induzida pelo vento
- Calcula-se a contribuição do vento e da velocidade inicial horizontal seperadamente depois juntando numa simples soma aritmética de velocidades e ou distâncias.

Para integrar as duas componentes é essencial saber a direção final, daí ser importante descobrir as componentes x e y de cada movimento assim facilitanto a sua soma. Primeiro usamos o "heading" magnético da aeronave designado por α diretamente para obter os vetores unitários desta mesma :

$$e_x = \sin(\alpha), e_y = \cos(\alpha) \tag{17}$$

Nota-se que as funções trigonométricas aparentam estar invertidas mas isto deve-se ao facto da origem no círculo trigonométrico corresponder ao "heading" 090 no compasso magnético daí a translação de 90º.

O vento tem uma ligeira diferença, por norma, em termos aeronáuticos e o que de facto verifica-se nas informações METAR, a orientação do vento (designada por β) é dada em função da direção da qual ele "sopra" relativamente à aeronave e não a direção para qual ele "sopra". Logo temos os seguintes vetores unitários do vento :

$$e_{xv} = -\sin(\beta), e_{yv} = -\cos(\beta) \tag{18}$$

O que resulta nas sequintes equações finais :

$$d_x(t) = \frac{\log(k_1 \cdot V_{hor_0} \cdot t + 1)}{k_1} e_x + V_{vento} \cdot e_{xv} \cdot t \tag{19}$$

$$d_y(t) = \frac{\log(k_1 \cdot V_{hor_0} \cdot t + 1)}{k_1} e_y + V_{vento} \cdot e_{xv} \cdot t \tag{20}$$

As componentes verticais permanecem inalteradas face aos ajustes do vento. Finalmente, para ter informação sobre as distâncias finais necessitamos do tempo de queda que pode ser obtido através da equação da distância vertical percorrida quando igualada a 0 :

$$0 = h_0 - \frac{M}{k} \log\left(\cosh\sqrt{\frac{k_2 \cdot g}{M}} \cdot t\right) \tag{21}$$

O que resulta na seguinte expressão :

$$t_{queda} = \operatorname{arccosh}\left(e^{\frac{h_0 \cdot k_2}{M}}\right) \cdot \sqrt{\frac{M}{g \cdot k_2}} \tag{22}$$

3.2.4 Dados necessários

Obtidas as fórmulas precisamos uma vez mais de obter os parâmetros físicos das aeronaves em estudo. Alguns destes parâmetros podem ser inseridos pelo utilizador no software (tendo em conta limitações impostas pela aeronave) ou seja parâmetros do tipo **1** e outros são arbitrados pela aeronave em si, tipo **2**. No caso da asa fixa são necessários :

Table 1: Parâmetros necessários para o cálculo ”rotary wing”

Parâmetro	**Unidade**	**Tipo**
MTOM	kg	2
V_{hor_0}	m/s	1
h_0	m	1
C_D	-	2**
$A_{lateral}$	m^2	2
A_{topo}	m^2	2

Nota-se que os valores de C_D foram obtidos através da seguinte relação retirada de um estudo acerca do tópico [1]:

$$C_D = 0.105 + MTOM \cdot 0.087 \tag{23}$$

3.2.5 Validade da correção do vento

Apesar de não ter encontrado quaisquer fontes que tivessem estudado esta aproximação que eu desenvolvi, posso julgar a sua validade através do estudo das velocidades reduzidas induzidas pelo vento para um certo drone. Estudando o DJI Mini 2 em condições ISO :

$$k_2 = 0.5 \cdot 1.225 \cdot (0.081 \cdot 0.058) \cdot 0.126054 = 0.00036272353 \tag{24}$$

Este valor de k combinado com uma velocidade genérica de 16 m/s :

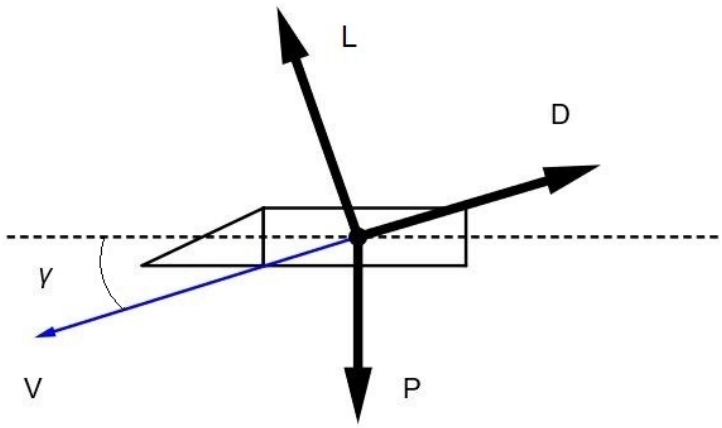
$$a_{vento} = \frac{0.00036272353 \cdot 16^2}{0.242} = 0.38370753586 \frac{m}{s^2} \tag{25}$$

Ou seja, a influência do vento lateral será tão reduzida que terá apenas impacto para quedas de altitudes extremamente elevadas, altitudes para quais a maioria do movimento será efetuado à velocidade terminal horizontal calculada anteriormente.

3.3 Planagem

3.3.1 Establecimento do problema

As aeronaves de asa fixa vão enquadrar-se principalmente neste tipo de queda, de forma semelhante ao que foi feito anteriormente, vamos começar por establecer as forças atuantes :



Neste novo caso temos a adição da força de sustentação L gerada pelas asas e de um parâmetro de extrema importância para a planagem γ, o ângulo de descida. Passemos então às equações das forças mas desta vez, façamos em componentes paralelas e perpendiculares ao movimento :

$$\sum F_{par} = -D + P \cdot \sin\gamma \tag{26}$$

$$\sum F_{per} = L - P \cdot \cos\gamma \tag{27}$$

O movimento de planagem otimizada é o caso em que o planador obterá a maior distância percorrida sobre o solo, neste caso limite de grande importância as acelerações do planador em todos os eixos são 0 (velocidades constantes), logo, temos que :

$$-D + P \cdot \sin\gamma = 0 \tag{28}$$

$$L - P \cdot \cos\gamma = 0 \tag{29}$$

Rearranjando as equações e dividindo uma pela outra obtemos :

$$\frac{L}{D} = \frac{P \cdot \cos\gamma}{P \cdot \sin\gamma} = \frac{1}{\tan\gamma} \tag{30}$$

Isto implica que a otimização do chamado "Lift to Drag ratio" (L/D) corresponde à minimização da $\tan\gamma$ que por sua vez, tendo em conta que γ varia entre $[-90, 0]^{\circ}$ e a forma do gráfico da tangente, corresponde a minimizar o ângulo de descida.

Desenvolvendo as forças L e D obtemos :

$$L = \frac{1}{2} \cdot C_L \cdot \rho \cdot A_{asa} \cdot V^2 \tag{31}$$

Sendo C_L o coeficiente de sustentação, A_{asa} a área da asa e V a velocidade verdadeira da aeronave (TAS).

$$D = \frac{1}{2} \cdot C_D \cdot \rho \cdot A_{asa} \cdot V^2 \tag{32}$$

Esta equação apresenta uma única diferença (o coeficiente de arrasto) que pode ser calculado da seguinte forma :

$$C_D = C_{D0} + \frac{{C_L}^2}{\pi \cdot AR \cdot e} \tag{33}$$

Sendo C_{D0} o coeficiente de arrasto parasítico (característica do perfil) e a segunda parte da equação o atrito induzido caracterizado pelo C_L do perfil, o AR ou razão de aspeto da asa e e ou coeficiente de oswald da aeronave.

Podemos então reescrever as equações da seguinte forma :

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D0} + \frac{{C_L}^2}{\pi \cdot AR \cdot e}} \tag{34}$$

Nota-se que nesta equação, apenas o C_L é variável (face à velocidade neste caso) sendo o resto constantes o que nos permite derivar em ordem a C_L e encontrar um máximo local, ou seja, um "Lift to Drag ratio" otimizado para um certo C_L que por sua vez corresponderá à minimização da $\tan\gamma$ previamente mencionada :

$$\frac{\left(C_{D0} + \frac{{C_L}^2}{\pi \cdot e \cdot AR}\right) - C_L \cdot \left(\frac{2 \cdot C_L}{\pi \cdot e \cdot AR}\right)}{{C_D}^2} = 0 \tag{35}$$

Resolvendo obtemos :

$$C_{\mathrm{L\ optimizado}} = \sqrt{C_{D0} \cdot \pi \cdot e \cdot AR} \tag{36}$$

Como $\gamma = \arctan\left(\frac{D}{L}\right)$, temos uma expressão para C_L, e C_D pode ser expressado em função de C_L, obtém-se :

$$\gamma = \arctan\left(\sqrt{\frac{4 \cdot C_{D0}}{\pi \cdot e \cdot AR}}\right) \tag{37}$$

Fazendo a aproximação dos pequenos ângulos, $\gamma \approx 0 \implies L \approx P$, juntado a equação (26), obtemos então a expressão para a velocidade de glide otimizada TAS :

$$V_{glide} = \sqrt{\frac{2 \cdot P}{\rho \cdot A_{asa}}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{C_{D0} \cdot \pi \cdot e \cdot AR}} \tag{38}$$

As componentes x, y e z da velocidade podem ser obtidas de uma forma semelhante ao que foi feito anteriormente :

$$e_x = -\sin(\beta), e_y = -\cos(\beta) \tag{39}$$

$$V_x = \cos(\gamma) \cdot V_{glide} \cdot e_x, V_y = \cos(\gamma) \cdot V_{glide} \cdot e_y, V_z = \sin(\gamma) \cdot V_{glide} \tag{40}$$

3.3.2 Correção do Vento

Neste caso a correção do vento é mais simples, sendo que este afeta a "ground speed" ou GS de forma simples :

$$GS = TAS - V_{vento} \tag{41}$$

Ajustando para componentes x e y da mesma forma como feito na secção anterior obtém-se uma vez mais a velocidades nas diferentes componentes

$$d_x(t) = V_x \cdot t + V_{vento} \cdot e_{xv} \cdot t \tag{42}$$

$$d_y(t) = V_y \cdot t + V_{vento} \cdot e_{yv} \cdot t \tag{43}$$

$$d_z(t) = V_z \cdot t \tag{44}$$

Sendo e_{xv} e e_{yv} calculados da mesma forma que a secção anterior. Finalmente, para ter informação sobre as distâncias finais precisamos do tempo de queda que pode ser obtido através da altitude inicial e do "sink rate" ou seja a velocidade vertical V_z :

$$t_{queda} = \frac{h_0}{V_z} \tag{45}$$

3.3.3 Otimização do L/D

Como foi dito anteriormente, a obtenção do "glide ratio" ótimo para a maior distância de planagem possível baseia-se na otimização do $\frac{L}{D}$. Esta otimização pode ser visualizada calculando os gráficos para a sustentação e a sua relação com o arrasto em função de diferentes velocidades calibradas como poder ser visto na imagem 1.

Tendo em conta que considerámos $L \approx P$, isto significa que otimizar $\frac{L}{D}$ é equivalente a minimizar D como podemos reparar na imagem 2.

3.3.4 Validade da aproximação de ângulos pequenos

De acordo com John T. Lowry no seu livro sobre a "performance" de aeronaves ligeiras [2], a aproximação de ângulos pequenos leva aos seguintes erros quando comparados com a solução exata das equações establecidas :

294 *John T. Lowry*

Table 9.5 Glide, turn, descent data for Cessna 172, MSL, flaps up, 2400 lbf

	Wings level		Banked 45 deg	
Parameter	Exact	Small γ	Exact	Small γ
V_{bg}, KCAS	71.84	72.00	85.25	85.62
γ_{bg}, deg	−5.38	−5.40	−7.59	−7.65
R_{bg}, ft	NA	NA	649.2	649.2
V_{md}, KCAS	54.22	54.71	63.87	65.06
$\dot{h}_{md}$ ft/min	−597.2	−602.5	−1683.0	−1013.2

Table 9.6 Glide, turn, descent data for F104G, MSL, flaps up, 18000 lbf

	Wings level		Banked 45 deg	
Parameter	Exact	Small γ	Exact	Small γ
V_{bg}, KCAS	299.65	300.73	355.10	357.63
γ_{bg}, deg	−6.84	−6.89	−9.63	−9.77
R_{bg}, ft	NA	NA	11324.6	11324.6
V_{md}, KCAS	225.13	228.5	263.51	271.74
$\dot{h}_{md}$ ft/min	−3161.5	−3207.4	−8688.9	−5394.1

Felizmente, como podemos ver pela tabela, a solução de pequenos ângulos leva a erros muito reduzidos seja para voo nivelado ou para voo com ângulo de pranchamento, por esta razão considerei a aproximação válida para o trabalho em questão.

3.4 Cálculo de distâncias

O simulador tem por base equações de movimento em coordenadas cartesianas. Após ser obtida a "ground speed" para cada movimento, uma função de conversão usa a posição inicial em coordenadas geográficas juntamente com a distância percorrida e o "heading" magnético de forma a obter as coordenadas da posição final de acordo com o datum WGS84.

```

(...)

finalposition = geodesic(meters=distance_traveledfx).destination(
    initial_position, resultfx[9][1])

(...)

finalposition = geodesic(meters=distance_traveledq).destination(
    initial_position, resultquad[6])
```
Listing 1: Cálculo da posição final

3.4.1 Dados necessários

Uma vez mais passamos aos dados necessários para os cálculos, os dados inseridos pelo utilizador (tendo em conta limitações impostas pela aeronave) ou seja parâmetros do tipo **1** e outros arbitrados pela aeronave em si, tipo **2**. No caso da asa fixa são necessários :

Table 2: Parâmetros necessários para o cálculo asa fixa

Parâmetro	**Unidade**	**Tipo**
MTOM	kg	2
V_{hor_0}	m/s	1
h_0	m	1
C_{D0}	-	2*
AR	-	2
A_{asa}	m^2	2
e	-	2*

* Dados normalmente arbitrados devido à falta de informação

4 Gráficos

Antes de apresentar os gráficos, uma breve explicação sobre ambos. O primeiro gráfico apresenta o rácio de sustentação para arrasto, o ponto preto corresponde aos valores calculados pela previsão teórica previamente apresentada e o ponto vermelho corresponde ao máximo local encontrado por métodos computacionais.

O segundo gráfico representa o arrasto total e as suas duas componentes, o arrasto parasítico e o arrasto induzido. Os dois pontos são semelhantes aos anteriores só que agora representam a minimização do arrasto sentido pela aeronave.

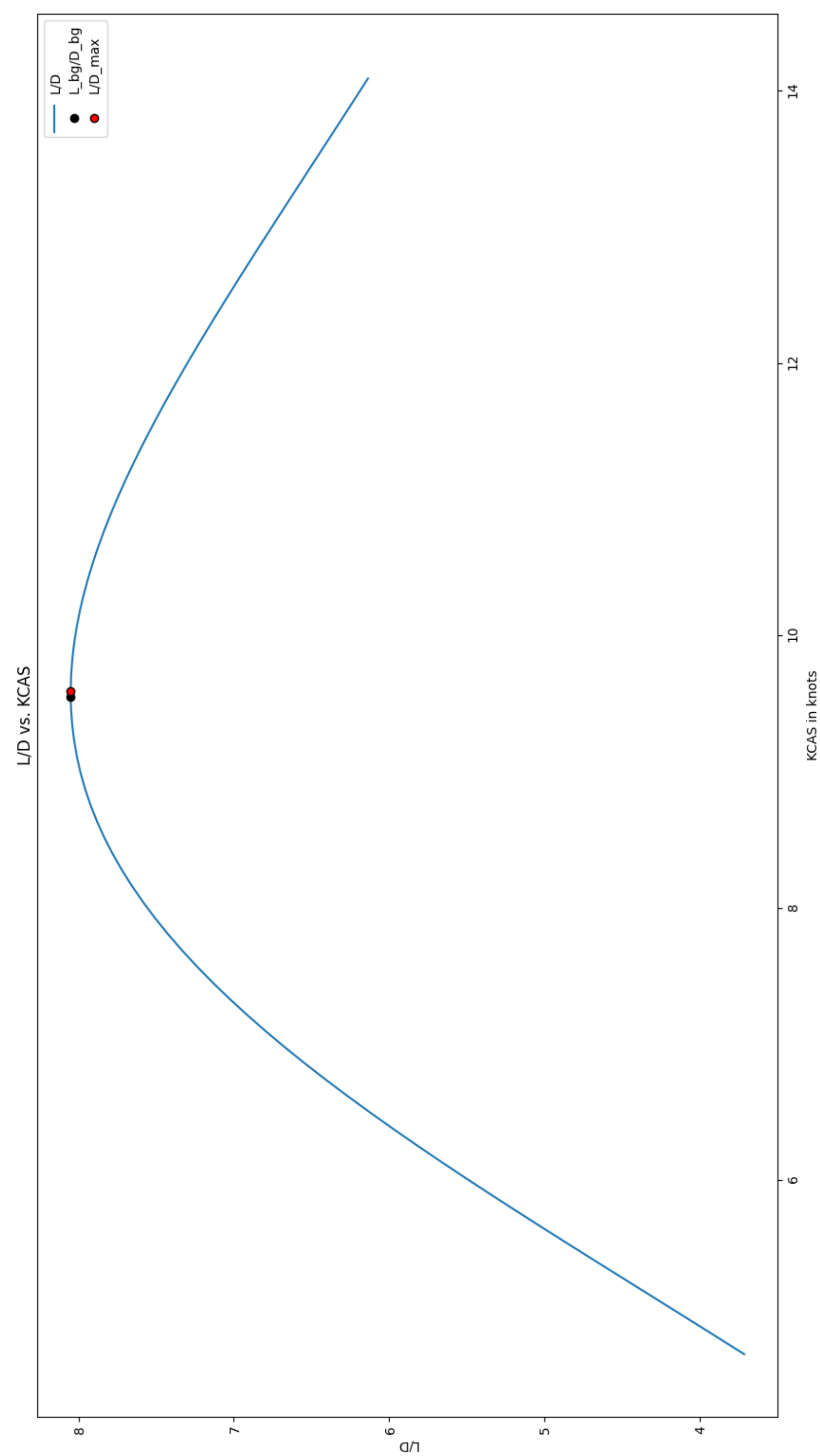


Figure 1: $\frac{L}{D}$ vs CAS

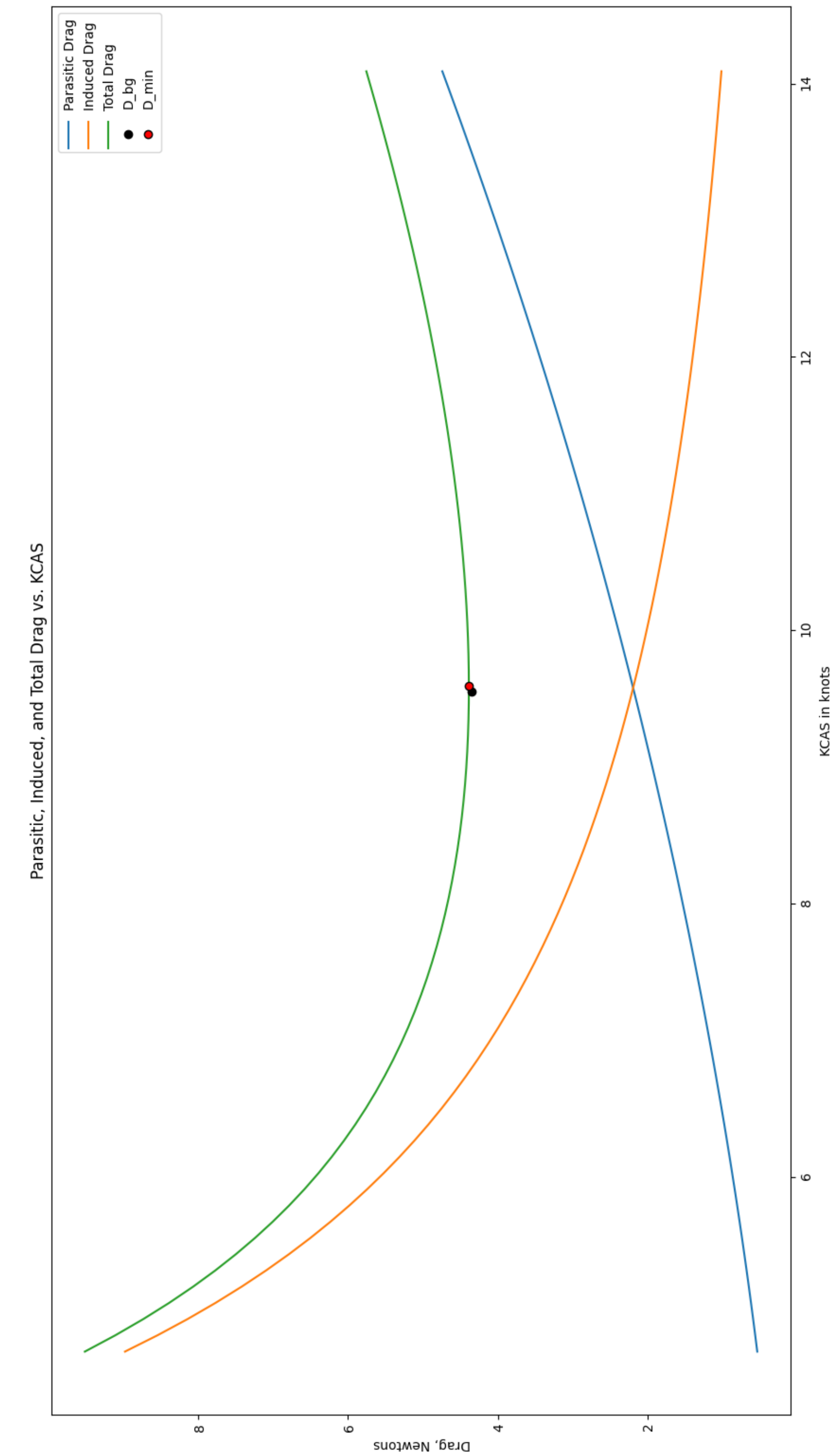


Figure 2: Di, Dp e D vs CAS

5 Bibliografia

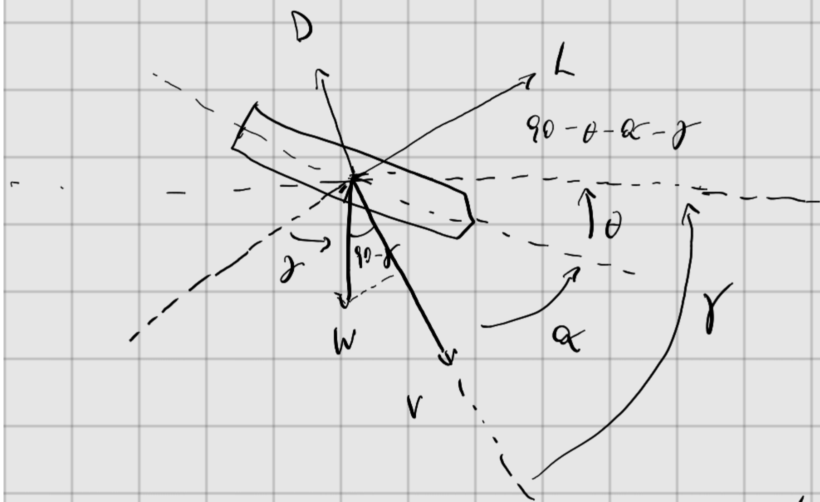
References

[1] Gautier Hattenberger, Murat Bronz, and Jean-Philippe Condomines. "Evaluation of drag coefficient for a quadrotor model". In: *International Journal of Micro Air Vehicles* 15 (Jan. 2023), p. 175682932211483. DOI: 10.1177/17568293221148378.

[2] John T. Lowry. *Performance of light aircraft.* American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 1999.

6 Anexos

Abaixo encontram-se os cálculos completos feitos manualmente.



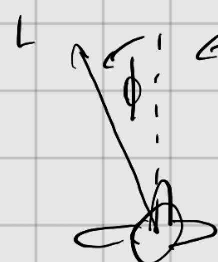
For constant V:

$$\cos(90-\gamma) \cdot W = D$$

$$\Leftrightarrow D = W \cdot \sin\gamma$$

Constant velocity on the perpendicular to the flight path:

$$L \cdot \cos\phi = W \cdot \cos\gamma \quad \wedge \quad \phi = 1$$



$$\Leftrightarrow L = W \cdot \cos\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{L}{D} = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

Finally note that
$$\begin{cases} C_D = C_{D_0} + \dfrac{C_L^2}{\pi e A} \\ C_D = \dfrac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \\ C_L = \dfrac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \end{cases}$$

Notice that for no wind:

$$\text{Glide ratio} = \left|\frac{G.S.}{V_{vertical}}\right| = \frac{V \cdot \cos\gamma}{|V \cdot \sin\gamma|} = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{L}{D}$$

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi e A}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\left(\frac{C_L}{C_D}\right)}{\partial C_L} = \frac{\left(C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi e A}\right) - C_L \cdot \left(\frac{2 C_L}{\pi e A}\right)}{C_D^{\,2}}$$

$\left.\frac{L}{D}\right|_{max} \Leftrightarrow$ Max glide ratio $\Leftrightarrow \frac{\partial\left(\frac{C_L}{C_D}\right)}{\partial C_L} = 0 \Leftrightarrow C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi e A} - C_L \cdot \frac{2 C_L}{\pi e A} = 0$

$$\Leftrightarrow C_L^2\left(\frac{1}{\pi e A} - \frac{2}{\pi e A}\right) + C_{D0} = 0 \Leftrightarrow C_L = \sqrt{C_{D0}\pi e A}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{C_L}{C_D}\right|_{max} = \frac{\sqrt{C_{D0}\pi e A}}{C_D} = \frac{\sqrt{C_{D0}\pi e A}}{C_{D0} + \frac{\sqrt{C_{D0}\pi e A}^{\,2}}{\pi e A}} = \frac{\sqrt{C_{D0}\pi e A}}{\boxed{2 C_{D0}}} = \left.\frac{L}{D}\right|_{max}$$

Interesting...

Note then that: $\left.\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right|_{max} = \left.\frac{1}{\tan\gamma}\right|_{max} = \frac{\sqrt{C_{D0}\pi e A}}{2 C_{D0}} = \left.\frac{L}{D}\right|_{max} =$ Best glide ratio

For a $\gamma \approx 0$, $L \approx W \Rightarrow C_L \approx \frac{W}{\frac{1}{2}\rho S V^2}$ and $C_L = \sqrt{C_{D0}\pi e A}$

$$\Rightarrow V_{glide\ opt} \approx \sqrt{\frac{W}{\sqrt{C_{D0}\pi e A}\cdot\frac{1}{2}\rho S}} = \sqrt{\frac{2\cdot W}{\rho\cdot S}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{C_{D0}\pi e A}}$$

$$\frac{1}{\tan\gamma} = \frac{L}{D} \Rightarrow \frac{1}{\tan\gamma} = \frac{\sqrt{C_{D0}\pi e A}}{C_{D0} + \frac{\sqrt{C_{D0}\pi e A}^{\,2}}{\pi e A}} = \frac{\sqrt{C_{D0}\pi e A}}{2 C_{D0}}$$

Interesting

$$\Rightarrow \gamma = \arctan\left(\sqrt{\frac{4 C_{D0}}{\pi e A}}\right)$$

Fallo bateria : $v_{ox} = 0$
$v_{ex} = v_{max}$

→ Converter términos convectivos
Clasificar upwind antes → adiante CFL 2.0 → 150 m
↳ punto dinámico acima do rio

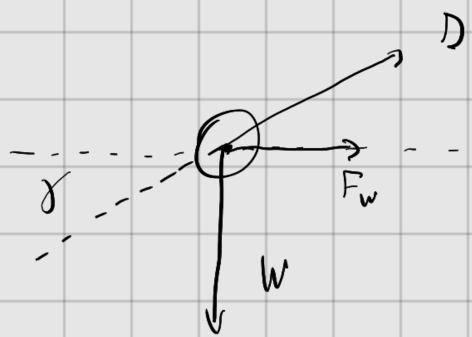
GUI → escolher data, adiante, inicio cond. MOTAR,
Resultados para todos os pontos overlay com maps, coordenadas wgs 84

→ Para reparar

V_{max} ??? para a ??

h max

Wind max max



$$\gamma = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$

W is const.

$$D = C_d \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot |v|^2 \cdot A$$

$$F_x = D \cdot \cos\gamma = D_x + F_w \qquad a_x = -\frac{D}{M} \cdot \cos\gamma$$

$$F_y = D \cdot \sin\gamma - W = D_y - W \qquad a_y = \frac{D}{M} \cdot \sin\gamma - g$$

$$k_1 = \frac{1}{2}\rho C_d \qquad k_2 = \frac{1}{2}\rho C_{d_2}$$

No wind

$$\Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{k}{M} v_x(t)^2 \Leftrightarrow v_x(t) = \frac{1}{k \cdot t + C} \Leftrightarrow v_x(t) = \frac{1}{k \cdot t + \frac{1}{v_{0x}}}$$

$$v_x(0) = v_{0x} \Leftrightarrow v_{0x} = \frac{1}{c_1} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{v_{0x}}$$

$$d_x(t) = \int_0^x v_x(t)\,dt = \frac{\ln(k \cdot t \cdot v_{0x} + 1)}{k}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{k}{M} v_y^2 - g \Leftrightarrow \frac{\partial t}{\partial v_y} = \frac{1}{\frac{k}{M} v_y^2 - g}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\partial t}{\partial v_y}\,\partial v_y = \int \frac{1}{\frac{k}{M} v_y^2 - g}\,\partial v_y$$

$$\Leftrightarrow t + c_2 = \int \frac{\frac{k}{M}}{\left(\frac{k}{M} v_y - \sqrt{g\frac{k}{M}}\right)\left(\frac{k}{M} v_y + \sqrt{g\frac{k}{M}}\right)} \, dv_y$$

$$\ell = \frac{k}{M} v_y \qquad d\ell = \frac{k}{M}$$

$$\Leftrightarrow t + c_2 = \int \frac{1}{\left(\ell - \sqrt{g\frac{k}{M}}\right)\left(\ell + \sqrt{g\frac{k}{M}}\right)} \, d\ell$$

$$\Leftrightarrow t + c_2 = \int - \frac{\frac{1}{\ell + \sqrt{g\frac{k}{M}}} - \frac{1}{\ell - \sqrt{g\frac{k}{M}}}}{2\sqrt{g\frac{k}{M}}} \, d\ell$$

$$\Leftrightarrow - \frac{1}{2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{M}}} \int \frac{1}{\ell + \sqrt{g\frac{k}{M}}} \, d\ell + \frac{1}{2\sqrt{g\frac{k}{M}}} \int \frac{1}{\ell - \sqrt{g\frac{k}{M}}} = t + c_2$$

$$\Leftrightarrow t = - \frac{1}{2\sqrt{g\frac{k}{M}}} \ln\left|\ell - \sqrt{g\frac{k}{M}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{g\frac{k}{M}}} \ln\left|\ell + \sqrt{g\frac{k}{M}}\right| + c_2$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2\sqrt{g\frac{k}{M}}} \left[- \ln\left|\frac{k}{M} v_y - \sqrt{g\frac{k}{M}}\right| + \ln\left|\frac{k}{M} v_y + \sqrt{g\frac{k}{M}}\right| \right] + c_2$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left|\frac{v_y + \sqrt{g\frac{M}{k}}}{v_y - \sqrt{g\frac{M}{k}}}\right| = \ln \alpha}{2\sqrt{g\frac{k}{M}}} + c_2$$

$$\boxed{\begin{matrix} a = \frac{k}{M} \\ b = g \end{matrix}}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{k}{Mg}} v_y + 1}{\sqrt{\frac{k}{Mg}} v_y - 1}\right|}{2\sqrt{\frac{gk}{M}}} + c_2$$

If $t \to +\infty \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{k}{Mg}} v_y + 1}{\sqrt{\frac{k}{Mg}} v_y - 1} \to 0^+ \Leftrightarrow v_y = -\sqrt{\frac{k}{Mg}} = v_{y_{max}} = v_t$

1

Let's say that:

$$y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \Leftrightarrow e^{2y} = \left|\frac{x+1}{x-1}\right|, \text{ if } |x|<1$$

$$\Rightarrow e^{2y} = \frac{x+1}{1-x} \Leftrightarrow e^{2y} - xe^{2y} = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{1+e^{2y}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Leftrightarrow x = \frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}} = \tanh y$$

$$\underbrace{-\sqrt{\frac{gk}{M}}\cdot(t+C_2)}_{\to y} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\overbrace{\sqrt{\frac{k}{Mg}}\cdot v_y}^{=x} - 1}{\underbrace{\sqrt{\frac{k}{Mg}}\cdot v_y}_{=x} + 1}\right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{k}{Mg}}\cdot v_y = \tanh\left[-\sqrt{\frac{gk}{M}}(t+C_2)\right] \Leftrightarrow v_y = \sqrt{\frac{Mg}{k}}\tanh\left[-\sqrt{\frac{gk}{M}}\cdot(t+C_2)\right]$$

but!!! $|x|<1 \Rightarrow -1 < \sqrt{\frac{k}{Mg}}\cdot v_y < 1$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{\frac{M\cdot g}{k}} < v_y < \sqrt{\frac{k}{Mg}} \quad (1) \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Solution is valid !!!

So: $v_y = \sqrt{\frac{Mg}{k}}\tanh\left[-\sqrt{\frac{gk}{M}}\cdot t + C_2\right] \wedge v_{y_e} = v_{y_0}$

$$\Leftrightarrow v_{y_0} = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh(c_2)$$

$\to -\tanh x = \tanh -x$

$$\Rightarrow c_2 = -\operatorname{arctanh}\left[v_{y_0}\sqrt{\frac{k}{mg}}\right] \qquad (\text{if } v_{y0} = 0,\ c_1 = 0)$$

$$h(t) = \int v_y\,dt = \int -\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left[\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t + c_2\right]dt =$$

$$= -\sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot\sqrt{\frac{m}{gk}}\cdot\ln\left|\cosh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t + \cancelto{0}{c_2}\right)\right| + c_3$$

$$= -\frac{m}{k}\cdot\ln\left|\cosh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\cdot t\right)\right| + c_3$$

$$h(0) = h_0 \Rightarrow h(0) = -\frac{m}{k}\cdot\underbrace{\ln(\overbrace{\cosh(0)}^{1})}_{0} + c_3 = h_0$$

$$\Leftrightarrow c_3 = h_0$$

Fall time:

$$\text{If } h(t) = 0 \Rightarrow -h_0 = -\frac{m}{k}\ln\left(\left|\cosh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\cdot t\right)\right|\right)$$

$$\Rightarrow e^{h_0\frac{k}{m}} = \cosh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\cdot t_f\right)$$

$$\Rightarrow t_f = \operatorname{arccosh}\left(e^{h_0\frac{k}{m}}\right)\cdot\sqrt{\frac{m}{gk}}$$

Wind approx:

Wind balances drag leading to a $v_{\substack{wind\\thermal}}$

Assume suspension already correct if that's the case

$$F_w = \frac{1}{2} \cdot A_{side} \cdot (\overbrace{V_{wind} - V_n(t)}^{\hat{}})^2 \cdot C_d \cdot \rho$$

$$D = \frac{1}{2} \cdot A_{side} \cdot (V_n(t))^2 \cdot C_d \cdot \rho$$

$$a_n = 0 \Leftrightarrow F_w - D = 0 \Leftrightarrow \cancel{V_n(t)^2} = \cancel{V_n(t)^2} - 2 V_{wind} V_n(t) + V_{wind}^2$$

$$\Leftrightarrow 2 V_n(t) = V_{wind} \Leftrightarrow V_n(t) = \frac{V_{wind}}{2} \quad //$$

So we assume the following:

Hor. movement = Movement caused by v_{0_n} and $Drag_v$
+
Movement caused by v_{wind} and $Drag_w$

Reason: $F_w \ll 1$ due to $A \ll 1$ for small drones
but since $M_{dr} < 1$ also, the effect is noticeable